

二项式练习

学校:_____ 姓名:_____ 班级:_____ 考号:_____

一、单选题

1. 已知 $x(x+2)^6 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_7(x+1)^7$, 则 $a_4 =$ ()

- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

【来源】河北省邢台市五岳联盟 2023-2024 学年高三上学期开学考试数学试题

【答案】C

【分析】令 $t = x+1$, 则问题转化为 $(t-1)(t+1)^6 = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_7t^7$, 又 $(t-1)(t+1)^6 = t(t+1)^6 - (t+1)^6$, 写出 $(t+1)^6$ 展开式的通项, 即可求出 t^4 的系数.

【详解】令 $t = x+1$, 则 $x = t-1$,

对于 $x(x+2)^6 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_7(x+1)^7$,

即 $(t-1)(t+1)^6 = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_7t^7$,

又 $(t-1)(t+1)^6 = t(t+1)^6 - (t+1)^6$,

其中 $(t+1)^6$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r t^{6-r}$ ($0 \leq r \leq 6$ 且 $r \in \mathbf{N}$),

所以 $(t-1)(t+1)^6$ 展开式中 t^4 的项为 $t \cdot C_6^3 t^3 - C_6^2 t^4$,

所以 $a_4 = C_6^3 - C_6^2 = 5$.

故选: C

2. 已知 $\left(x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中, 前三项的系数依次成等差数列, 则展开式中二项式系

数最大的项是 ()

- A. $\frac{35}{8}x^{\frac{1}{2}}$ B. $7x^{\frac{7}{2}}$ C. $\frac{35}{8}x^2$ D. $7x^2$

【来源】甘肃省部分学校 2024 届高三下学期 2 月开学考试数学试题

【答案】C

【分析】利用二项展开式的通项求出展开式前三项的系数, 列出方程求出 n 的值, 由二项式系数的性质求出答案.

【详解】展开式中的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1} = C_n^r x^{n-r} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r = \left(\frac{1}{2}\right)^r C_n^r x^{n-\frac{3}{2}r}$,

所以前三项的系数依次为 $C_n^0, \frac{1}{2}C_n^1, \frac{1}{4}C_n^2$,

依题意, 有 $C_n^0 + \frac{1}{4}C_n^2 = C_n^1$, 即 $1 + \frac{1}{4} \times \frac{n(n-1)}{2} = n$,

整理得 $n^2 - 9n + 8 = 0$, 解得 $n = 1$ (舍去) 或 $n = 8$.

由二项式系数的性质可知, 展开式中第 5 项的二项式系数最大,

$$\text{即 } T_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 C_8^4 x^{8-\frac{3}{2} \times 4} = \frac{35}{8} x^2.$$

故选: C.

3. $\left(\frac{x}{2}+1\right)^2 + \left(\frac{x}{3}+1\right)^3 + \left(\frac{x}{4}+1\right)^4 + \cdots + \left(\frac{x}{10}+1\right)^{10}$ 的展开式中含 x 项的系数为 ()

A. 9

B. 10

C. 18

D. 20

【来源】山东省临沂市 2024 届高三下学期一模考试数学试题

【答案】A

【分析】先求出 $\left(\frac{x}{n}+1\right)^n (2 \leq n \leq 10, n \in \mathbb{N}^*)$ 展开式中含 x 项的系数, 进而可根据已知条件求出结果.

【详解】 $\left(\frac{x}{n}+1\right)^n (2 \leq n \leq 10, n \in \mathbb{N}^*)$ 二项展开式的通项为 $T_{k+1} = C_n^k \left(\frac{x}{n}\right)^{n-k}$,

令 $n-k=1$, 则 $k=n-1$,

即 $\left(\frac{x}{n}+1\right)^n$ 的展开式中含 x 项的系数为 $\frac{1}{n} C_n^{n-1} = 1$,

$\therefore \left(\frac{x}{2}+1\right)^2 + \left(\frac{x}{3}+1\right)^3 + \left(\frac{x}{4}+1\right)^4 + \cdots + \left(\frac{x}{10}+1\right)^{10}$ 的展开式中含 x 项的系数为 $1 \times 9 = 9$,

故选: A.

4. 设 $(x^2 + 2x - 2)^6 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_{12}(x+1)^{12}$, 则 $a_0 +$

$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 11a_{11} + 12a_{12}$ 的值为 ().

A. -384

B. 729

C. 345

D. 384

【来源】第八届高二试题 (B 卷) -“枫叶新希望杯”全国数学大赛真题解析 (高中版)

【答案】C

【分析】赋值法求解 a_0 , $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 12a_{12}$ 为右式中合并同类项后的一次项系数, 两项相加即可.

【详解】 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 12a_{12}$ 为右式中合并同类项后的一次项系数，

而左式的一次项系数为 $C_6^1 \cdot 2(-2)^5 = -384$ ，

令 $x = -1$ 得 $a_0 = 3^6 = 729$ ，

所以原式的值 $= 729 - 384 = 345$ 。

故选：C。

5. $(2+x)^{10}$ 的展开式各项的系数中最大的是 ()

- A. x^2 的系数 B. x^3 的系数 C. x^4 的系数 D. x^5 的系数

【来源】浙江省杭州学军中学 2024 届高三下学期模拟测试数学试题

【答案】B

【分析】利用二项式通项的性质和组合数的性质计算出符合条件的 k 值即可。

【详解】通项公式为 $T_{k+1} = C_{10}^k \cdot 2^k \cdot x^{10-k}$ ，

因为 $C_{10}^k \cdot 2^k \geq C_{10}^{k-1} \cdot 2^{k-1} \Rightarrow 2C_{10}^k \geq C_{10}^{k-1}$ ，

所以

$$\frac{2 \times 10 \times 9 \times \cdots \times (11-k)}{k!} \geq \frac{10 \times 9 \times \cdots \times (12-k)}{(k-1)!} \Rightarrow \frac{2(11-k)}{k} \geq 1 \Rightarrow k(3k-22) \leq 0 \Rightarrow k \leq \frac{22}{3}$$

同理 $C_{10}^k \cdot 2^k \geq C_{10}^{k+1} \cdot 2^{k+1} \Rightarrow C_{10}^k \geq 2C_{10}^{k+1}$ ，

所以

$$\frac{10 \times 9 \times \cdots \times (11-k)}{k!} \geq \frac{2 \times 10 \times 9 \times \cdots \times (10-k)}{(k+1)!} \Rightarrow \frac{2(10-k)}{k+1} \leq 1 \Rightarrow (3k-19)(k+1) \geq 0 \Rightarrow k \geq \frac{19}{3}$$

,

所以 $k = 7$ ，

所以展开式各项的系数中最大的是第八项，为 $T_8 = C_{10}^7 \cdot 2^7 \cdot x^3$ ，即 x^3 的系数最大。

故选：B

6. $(x^2 + 2x - y)^5$ 的展开式中， x^5y^2 项的系数为 ()

- A. 10 B. -30 C. 60 D. -60

【来源】云南省昆明市第一中学 2024 届高三第七次高考仿真模拟数学试题

【答案】C

【分析】写出展开式通项，令 x 的次数为 5， y 的次数为 2，求出参数的值，代入通项后即可得解。

【详解】因为 $(x^2+2x-y)^5=[x^2+(2x-y)]^5$ 的展开式通项为

$$A_{r+1}=C_5^r \cdot (x^2)^{5-r} \cdot (2x-y)^r \quad (r=0,1,2,3,4,5),$$

$$(2x-y)^r \text{ 的展开式通项为 } B_{k+1}=C_r^k \cdot (2x)^{r-k} \cdot (-y)^k = C_r^k \cdot (-1)^k \cdot 2^{r-k} \cdot x^{r-k} y^k \quad (k=0,1,2,\dots,r),$$

$$\text{所以, } (x^2+2x-y)^5 \text{ 的展开式通项为 } T_{r+1,k+1}=C_5^r C_r^k \cdot (-1)^k \cdot 2^{r-k} \cdot x^{10-r-k} \cdot y^k,$$

其中 $r=0,1,2,3,4,5$, $k=0,1,2,\dots,r$,

$$\text{由 } \begin{cases} 10-r-k=5 \\ k=2 \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} r=3 \\ k=2 \end{cases},$$

所以, 展开式中 x^5y^2 项的系数为 $C_5^3 C_3^2 \cdot (-1)^2 \cdot 2 = 60$.

故选: C.

7. $\left(1+\frac{1}{x^3}\right)(1+x)^7$ 展开式中 x^3 项的系数为 ()

A. 42

B. 35

C. 7

D. 1

【来源】广东省汕头市 2024 届高三第一次模拟考试数学试题

【答案】A

【分析】写出展开式通项, 令 x 的指数为3, 求出参数的值, 代入通项后即可得解.

【详解】 $(1+x)^7$ 的展开式通项为 $T_{r+1}=C_7^r \cdot x^r \quad (r=0,1,2,\dots,7)$,

$$\text{因为 } \left(1+\frac{1}{x^3}\right)(1+x)^7 = (1+x)^7 + x^{-3}(1+x)^7,$$

在 $C_7^r \cdot x^r \quad (r=0,1,2,\dots,7)$ 中, 令 $r=3$, 可得 x^3 项的系数为 $C_7^3=35$;

在 $x^{-3}C_7^k \cdot x^k = C_7^k \cdot x^{k-3} \quad (k=0,1,2,\dots,7)$ 中, 令 $k-3=3$, 得 $k=6$, 可得 x^3 项的系数为

$$C_7^6=7.$$

所以, $\left(1+\frac{1}{x^3}\right)(1+x)^7$ 展开式中 x^3 项的系数为 $35+7=42$.

故选: A.

8. 已知 $(x-1)(x+2)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_7x^7$, 则 $a_0+a_1+a_3+a_5+a_7$ 的值为 ()

A. -66

B. -65

C. -63

D. -62

【来源】安徽省宿州市泗县第一中学 2023-2024 学年高二下学期开学考试数学试题

【答案】C

【分析】根据赋值法, 先代入 $x=0$, 得 $a_0=-2^6$, 代入 $x=1$, $x=-1$ 可得 $a_1+a_3+a_5+a_7=1$,

进而可得.

【详解】设 $g(x) = (x-1)(x+2)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$,

当 $x=0$ 时, 可得 $g(0) = (0-1)(0+2)^6 = a_0$, 得 $a_0 = -2^6$,

当 $x=1$ 时, 可得 $g(1) = (1-1)(1+2)^6 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_7$, 得

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 0,$$

当 $x=-1$ 时, 可得 $g(-1) = (-1-1)(-1+2)^6 = a_0 + (-a_1) + a_2 + \cdots + (-a_7)$, 得

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 = -2,$$

故 $g(1) - g(-1) = 2a_1 + 2a_3 + 2a_5 + 2a_7 = 2$, 得 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 1$,

故 $a_0 + a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = -2^6 + 1 = -63$,

故选: C

9. 若二项式 $\left(2 - \frac{x}{a}\right)(1-2x)^4$ 的展开式中 x^3 项的系数是 -58 , 则实数 a 的值为 ()

A. -2

B. 2

C. -4

D. 4

【来源】河南名校联盟 2022-2023 年高二下学期期中联考数学试卷

【答案】C

【分析】分别求出 $2 \times (1-2x)^4$ 和 $\frac{x}{a} \cdot (1-2x)^4$ 展开式中 x^3 项的系数, 即可求出 a 的值.

【详解】 $\left(2 - \frac{x}{a}\right)(1-2x)^4 = 2 \times (1-2x)^4 - \frac{x}{a} \times (1-2x)^4$,

$(1-2x)^4$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_4^r (-2x)^r = (-2)^r C_4^r x^r$, $r = 0, 1, 2, 3, 4$,

所以 $2 \times (1-2x)^4$ 展开式中 x^3 项的系数是 $2 \times (-2)^3 C_4^3 = -64$,

$\frac{x}{a} \cdot (1-2x)^4$ 展开式中 x^3 项的系数是 $\frac{1}{a} \times (-2)^2 C_4^2 = \frac{24}{a}$,

所以 $-64 - \frac{24}{a} = -58$, 解得 $a = -4$,

故选: C.

二、填空题

10. $\left(1 + \frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为_____. (用数字作答).

【来源】山东省青岛市莱西市 2023-2024 学年高二上学期学业水平阶段性检测二数学试题

【答案】84

【分析】由 $\left(1+\frac{y}{x}\right)(x+y)^8=(x+y)^8+\frac{y}{x}(x+y)^8$ ，写出 $(x+y)^8$ 展开式的通项，即可求出展开式中 x^2y^6 的系数.

【详解】因为 $\left(1+\frac{y}{x}\right)(x+y)^8=(x+y)^8+\frac{y}{x}(x+y)^8$ ，

其中 $(x+y)^8$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r x^{8-r} y^r$ ($0\leq r\leq 8$ 且 $r\in\mathbb{N}$)，

所以 $\left(1+\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中含 x^2y^6 的项为 $C_8^6 x^2 y^6 + \frac{y}{x} \cdot C_8^5 x^3 y^5 = 84x^2 y^6$ ，

所以展开式中 x^2y^6 的系数为84.

故答案为：84

11. $\left(2-\frac{x}{y}\right)(x+y)^6$ 的展开式中 x^2y^4 的系数为_____.

【来源】江西省重点中学协作体 2024 届高三一模数学试题

【答案】24

【分析】利用二项式定理展开式的通项公式可求答案.

【详解】二项式 $(x+y)^6$ 的展开式通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r} y^r$, $r\leq 6, r\in\mathbb{N}^*$ ，

当 $r=4$ 时， $T_5=C_6^4 x^2 y^4=15x^2 y^4$ ，当 $r=5$ 时， $T_6=C_6^5 x^1 y^5=6xy^5$ ，

因此展开式中含 x^2y^4 的项为 $2\times 15x^2 y^4 + 6xy^5 \cdot \left(-\frac{x}{y}\right) = 24x^2 y^4$ ，故所求系数为24.

故答案为：24.

12. 已知 $\left(\frac{1}{x}-2y\right)(mx-y)^5$ 的展开式中 x^2y^4 的系数为80，则 m 的值为_____.

【来源】江苏省南京市六校 2024 届高三下学期期初联合调研数学试题

【答案】 ± 2

【分析】根据已知条件及二项式展开式的通项公式即可求解.

【详解】由题意可知， $\left(\frac{1}{x}-2y\right)(mx-y)^5=\frac{1}{x}(mx-y)^5-2y(mx-y)^5$ ，

在 $\frac{1}{x}(mx-y)^5$ 的展开式中，由 $x^{-1}C_5^r (mx)^{5-r} (-y)^r = (-1)^r m^{5-r} C_5^r x^{4-r} y^r$ ，

令 $\begin{cases} 4-r=2 \\ r=4 \end{cases}$ ，得 r 无解，即 $\frac{1}{x}(mx-y)^5$ 的展开式中没有 x^2y^4 的项；

在 $2y(mx-y)^5$ 的展开式中，由 $2yC_5^r (mx)^{5-r} (-y)^r = 2(-1)^r m^{5-r} C_5^r x^{5-r} y^{r+1}$ ，

令 $\begin{cases} 5-r=2 \\ r+1=4 \end{cases}$ ，解得 $r=3$ ，

即 $2y(mx-y)^5$ 的展开式中 x^2y^4 的项的系数为 $2(-1)^3 m^{5-3} C_5^3 = -20m^2$,

所以 $\left(\frac{1}{x}-2y\right)(mx-y)^5$ 的展开式中 x^2y^4 的系数为 $20m^2$,

又因为 $\left(\frac{1}{x}-2y\right)(mx-y)^5$ 的展开式中 x^2y^4 的系数为 80,

所以 $20m^2 = 80$, 解得 $m = \pm 2$.

所以 m 的值为 ± 2 .

故答案为: ± 2 .

13. 若 $(1+2x^2)\left(ax+\frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式中所有项的系数和为 384, 则展开式中 x^3 的系数为_____.

【来源】宁夏银川一中、昆明一中 2024 届高三下学期 3 月联合考试（一模）理科数学试卷

【答案】91

【分析】利用系数和求出参数, 用二项式定理展开求系数即可.

【详解】由题意得 $(1+2x^2)\left(ax+\frac{1}{x}\right)^7$ 的展开式中所有项的系数和为 384,

令 $x=1$, 故 $(1+2)(a+1)^7 = 384$, 解得 $a=1$, 故求 $(1+2x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^7$ 中 x^3 的系数即可

而 $(1+2x^2)\left(x+\frac{1}{x}\right)^7 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^7 \cdot 2x^2 + \left(x+\frac{1}{x}\right)^7$,

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^7$ 的通项为 $T_{r+1} = C_7^r \cdot (x)^{7-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_7^r \cdot x^{7-2r}$,

令 $7-2r=3$, 解得 $r=2$, 此时 x^3 的系数为 $C_7^2 = 21$,

令 $7-2r=1$, 解得 $r=3$, 此时 x^3 的系数为 $2 \cdot C_7^3 = 35 \times 2 = 70$,

综上展开式中 x^3 的系数为 $21+70=91$.

故答案为: 91

【点睛】.

14. 在 $x(x+1)(x-1)^3$ 的展开式中, 含 x^2 的项的系数是_____.(用数字作答)

【来源】四川省成都市石室中学 2023-2024 学年高一下学期开学考试数学（理科）试卷

【答案】2

【分析】首先得出 $(x-1)^3$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_3^r \cdot x^{3-r} \cdot (-1)^r$, 然后分别令 $r=3$ 和 $r=2$

得出其展开式的常数项和含 x 的项，分两类情形即可得出所求的答案.

【详解】解：因为 $x(x+1)(x-1)^3 = (x^2+x)(x-1)^3$,

又因为 $(x-1)^3$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_3^r \cdot x^{3-r} \cdot (-1)^r$,

所以令 $r=3$ ，则其常数项为 $T_4 = -1$;

令 $r=2$ ，则其含 x 的项为 $T_3 = C_3^2 \cdot x = 3x$,

所以原展开式中含 x^2 的项的系数为： $1 \times (-1) + 1 \times 3 = 2$.

故答案为：2.

【点睛】本题考查二项式定理的应用，考查学生的逻辑思维能力，属中档题.

15. $\left(\frac{2}{x}+x\right)(x-1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为_____.

【来源】江苏省高邮市 2024 届高三下学期期初学情调研测试数学试题

【答案】-20

【分析】利用展开式求出所有含 x^3 的项即可得出系数为 -20.

【详解】由二项式定理可知展开式中含有 x^3 的项为

$$\frac{2}{x} \cdot C_5^1 x^4 (-1)^1 + x \cdot C_5^3 x^2 (-1)^3 = -2C_5^1 x^3 - C_5^3 x^3 = -20x^3,$$

所以可得展开式中 x^3 的系数为 -20.

故答案为：-20

16. $(2x-3)\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式中的常数项为_____.

【来源】1 号卷 2022 年高考最新原创信息试卷（二）理数

【答案】240

【分析】先求出 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 的展开式，然后赋值求得 $r=3$ ，即可求解常数项.

【详解】 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_5^r \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{5-r} \cdot \left(-2x^{-\frac{1}{3}}\right)^r = C_5^r \cdot (-2)^r \cdot x^{\frac{5}{2}-\frac{5}{6}r}$,

令 $\frac{5}{2}-\frac{5}{6}r=-1$ 或 $\frac{5}{2}-\frac{5}{6}r=0$ ，解得 $r=\frac{21}{5}$ （舍去）或 $r=3$ ，

故所求常数项为 $-3 \times C_5^3 \times (-2)^3 = 240$.

故答案为：240

17. 已知 $(mx-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中常数项为 -10，则 $m=$ _____.

【来源】河南省驻马店市 2023-2024 学年高二上学期 1 月期终考试数学试题

【答案】 -1

【分析】由 $(mx-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5 = mx\left(x+\frac{1}{x}\right)^5 - \left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ ，写出 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ 展开式的通项，从而得到展开式中常数项，即可得解.

【详解】因为 $(mx-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5 = mx\left(x+\frac{1}{x}\right)^5 - \left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ ，

其中 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_5^r x^{5-2r}$ ($0 \leq r \leq 5$ 且 $r \in \mathbb{N}$)，

则 $(mx-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中常数项为 $mx \cdot C_5^3 x^{-1} = 10m$ ，所以 $10m = -10$ ，解得 $m = -1$.

故答案为： -1

18. $(x-3)(x+2)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为_____.

【来源】辽宁省锦州市渤海大学附属高级中学 2023-2024 学年高三下学期 2 月摸底考试数学试题

【答案】 -40

【分析】写出展开式的通项，在 $(x-3)(x+2)^5 = x(x+2)^5 - 3(x+2)^5$ 中，分别求出 $x(x+2)^5$ 的展开式中 x^3 的系数以及 $-3(x+2)^5$ 的展开式中 x^3 的系数，相加即可得解.

【详解】 $(x+2)^5$ 的展开式通项为 $T_{k+1} = C_5^k \cdot x^{5-k} \cdot 2^k$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$)，

因为 $(x-3)(x+2)^5 = x(x+2)^5 - 3(x+2)^5$ ，

在 $xT_{k+1} = xC_5^k \cdot x^{5-k} \cdot 2^k = C_5^k \cdot x^{6-k} \cdot 2^k$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) 中，令 $6-k=3$ ，可得 $k=3$ ，

在 $-3T_{r+1} = -3C_5^r \cdot x^{5-r} \cdot 2^r$ ($r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) 中，令 $5-r=3$ ，可得 $r=2$ ，

所以，展开式中 x^3 的系数为 $C_5^3 \cdot 2^3 - 3C_5^2 \cdot 2^2 = 80 - 120 = -40$.

故答案为： -40.

19. $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^6$ 的展开式中， x^3 项系数为_____.

【来源】【名校面对面】2023-2024 学年高三上学期开学大联考数学试题

【答案】 $\frac{1}{64}$

【分析】求出二项式展开式的通项，令 x 的指数为 3，即可求出 x^3 项系数.

【详解】由 $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^6 = \left(\frac{x-2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}\right)^6 = \frac{(\sqrt{x}-1)^{12}}{64x^3}$,

由 $(\sqrt{x}-1)^{12}$ 展开式通项为 $T_{r+1} = C_{12}^r \cdot (\sqrt{x})^{12-r} \cdot (-1)^r = (-1)^r \cdot C_{12}^r \cdot x^{6-\frac{1}{2}r}$,

令 $6 - \frac{1}{2}r = 6$, 解得 $r = 0$,

则 x^3 项为 $\frac{(-1)^0 \cdot C_{12}^0 x^6}{64x^3} = \frac{1}{64}x^3$, 则 x^3 项系数为 $\frac{1}{64}$.

故答案为: $\frac{1}{64}$.

三、解答题

20. 已知 $(2x-1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$, 求下列各式的值:

(1) a_6 ;

(2) $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_7|$.

【来源】山东省德州市 2023-2024 学年高二上学期期末考试数学试题

【答案】(1) $a_6 = -448$

(2) 2187

【分析】(1) 求 a_6 即求 x^6 的系数, 利用通项公式求解;

(2) 采用赋值法, 令 $x=1$ 和 $x=-1$, 可解.

【详解】(1) 求 a_6 即求 x^6 的系数.

$$T_{r+1} = C_7^r (2x)^{7-r} (-1)^r = (-1)^r C_7^r 2^{7-r} x^{7-r}.$$

当 $7-r=6$, 即项 $r=1$ 时, $a_6 = (-1)^1 C_7^1 2^{7-1} = -448$.

(2) 由展开式可知 a_1, a_3, a_5, a_7 均为正值, a_0, a_2, a_4, a_6 均为负值,

$$\text{故 } |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_7| = (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) - (a_0 + a_2 + a_4 + a_6)$$

当 $x=1$ 时, $(2x-1)^7 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 1$,

当 $x=-1$ 时, $(2x-1)^7 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 = -3^7$,

所以 $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 = \frac{1-3^7}{2}$,

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = \frac{1+3^7}{2},$$

$$\text{故 } |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_7| = 3^7 = 2187.$$